On the most expected number of components for random links (Intelligence of Low-dimensional Topology)

市原, 一裕; 森, 真; 吉田, 健一

数理解析研究所講究録
第 1960 巻 2015 年 1-17

On the most expected number of components for random links

Kazuhiro Ichihara, Makoto Mori, and Ken-ichi Yoshida
College of Humanities and Sciences, Nihon University

1 Introduction

We consider the random link, which is defined as the closures of braids obtained from random walks on the braid groups. For random links, the expected value for the number of components were calculated by Jiming Ma. In this article, we report on the most expected number of components, and further, consider the most expected partition of integers coming from such random braids.

As an Appendix, we consider "Amida-kuji" (あみだくじ), that is, the traditional Japanese method of lottery, and apply our techniques to demonstrate the randomness of the Amida-kuji constructed via random walk.

In [3], from a probabilistic point of view, Jiming Ma introduced random links, which is defined as the closures of the randomly chosen braids, via random walks on the braid groups. In particular, he showed in [3, Theorem 1.1] that, for the random link coming from a random walk of k-step on the n-string braid group ($n \geq 3$), the expected value of the number of components converges to

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$$

when k diverges to ∞. See the next section for the precise definition of the random link.

From this results, it is natural to ask what is the most expected number of components for such a random link. We first answer to this question as follows.

Theorem 1. *Consider a random link obtained from a random walk on the braid group of n strands. Then the most expected number of components is equal to*

$$K_n=\left[\log(n+1)+\gamma-1+\frac{\zeta(2)-\zeta(3)}{\log(n+1)+\gamma-1.5}+\frac{h}{(\log(n+1)+\gamma-1.5)^2}\right]$$

where $[x]$ denotes the integer part of x, ζ the Riemann zeta function, $\gamma=0.5772\ldots$ the Euler-Mascheroni constant with $-1.1<h<1.5$. In particular, if $n>188$, the following hold.

$$\left[\log n-\frac{1}{2}\right]<K_n<[\log n]$$

This can be obtained from results on Combinatorics and Analytic number theory. Here we do not include our proof in detail, but give a sketch of the proof as follows.

The key observation to connect the problem of random link to algebra is the correspondence between components of the closure of a braid and cycles in the cycle decomposition of the permutation corresponding to the braid. In particular, the number of components are calculated as the number of such cycles. Therefore, in order to prove the theorem, it suffices to consider the Stirling number of the first kind, and study its maximizing index. It was already established by Hammersley [2] and Erdös [1], and combining their results, we can prove Theorem 1.

In view of this, we can relate random braids and random partitions of integers. Thus it is also natural to ask what is the most expected partition of the number of strings for a random braid. About this question, against our naive intuition, we have the following.

Theorem 2. *Consider a random braid obtained from a random walk on the braid group of n strands. Then the most expected partition of n is $((n-1), 1)$.*

Actually the probability for such a partition of the strings is shown to converge to $1/(n-1)$.

This theorem, together with the above observation, can be proved as a direct consequence of the next algebraic lemma.

Lemma 1. *In the symmetric group of the order at least 3, the conjugacy class of the maximal cardinality is the one containing the $(n-1)$-cycle $(1\ 2\ \ldots\ n-1)$, and the cardinality is $n \cdot (n-2)!$.*

We here omit the proof of this lemma; it can be proved by using basic group theory.

2 Link, braid and random walk

We here give a brief review of the setting for studying the random links introduced in [3]. See [3] for details.

We here only consider a probability distribution on the braid group $\mathfrak{B}_n$ of n-strings which induces a uniform distribution on the symmetric group $\mathfrak{S}_n$ on n letters, via the natural projection $\mathfrak{B}_n \to \mathfrak{S}_n$ $(n \geq 3)$. By using such a probability distribution, say μ, one can define a random walk by setting the transition probability as $\mathbb{P}(x, y) = \mu(xy^{-1})$. Here we suppose that our random walk starts at the identity element at time zero.

By considering the natural projection $\mathfrak{B}_n \to \mathfrak{S}_n$, such a random walk on $\mathfrak{B}_n$ induces a random walk on $\mathfrak{S}_n$ with respect to a uniform distribution on $\mathfrak{S}_n$. We here means by the *uniform distribution* on $\mathfrak{S}_n$ the probability distribution defined by $\mathbb{P}(s) = 1/n!$ holds for any $s \in \mathfrak{S}_n$. That is, we are assuming that the probability $\mathbb{P}(s)$ for any $s \in \mathfrak{S}_n$ induced from the random walk is sufficiently close to $1/n!$.

Then, conceptually, we said a braid is a *random braid* if it is represented by the the braid coming from a random walk on $\mathfrak{B}_n$ with sufficiently long steps.

We here remark that our assumption on the probability distribution is not so restricted. Actually, Ma showed the following as [3, Theorem 2.5]. Let μ be a probability measure on $\mathfrak{B}_n$, which induces a random walk $\pi(\omega_{n,k})$ on $\mathfrak{S}_n$. Suppose that the probability $\mathbb{P}(\pi(\omega_{n,1}) = id)$ is larger than 0, and the support of μ generates $\mathfrak{B}_n$. Then μ generates a uniformly distributed random walk on $\mathfrak{S}_n$ when $k \to \infty$. For example, the probability measure on $\mathfrak{B}_n$ defined by

$$\mu_c(e) = \mu_c(\sigma_i) = \mu_c(\sigma_i^{-1}) = \frac{1}{2n-1}$$

for the identity element e and each canonical generator $\sigma_i \in \mathfrak{B}_n$ $(1 \leq i \leq n-1)$ is shown to satisfy the assumption.

Now we consider a random walk $\omega_{n,k}$ on $\mathfrak{B}_n$, and the probability

$$p_{n,k}^m = \mathbb{P}(\widehat{\omega_{n,k}} \text{ has exactly } m \text{ components}).$$

Then, for the random link, we say that the most expected number of components is m if, for any sufficiently large k, $p_{n,k}^m$ is maximal for $1 \leq m \leq n$.

We also include some terminologies concerning to Theorem 2.

An element of the symmetric group $\mathfrak{S}_n$ of the oder n is uniquely represented as a composition of several cycles with distinct letters. The set of the lengths of such cycles gives a partition of the integer n. That is, if an element of $\mathfrak{S}_n$ is represented as a composition of cycles of lengths $n_1, n_2, \cdots, n_m$ with $n_1 > n_2 > \cdots > n_m$, then we have a partition $(n_1, n_2, \cdots, n_m)$ of n, for $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_m$ holds.

In view of this, given a braid σ with n-strings with $n > 0$, we define *a partition of the number of strings* for σ as a non-increasing sequence of positive integers $(n_1, n_2, \cdots, n_m)$ which is obtained in that way for the element $\pi(\sigma)$ of $\mathfrak{S}_n$, where π denotes the natural projection $\mathfrak{B}_n \to \mathfrak{S}_n$.

Acknowledgement

The authors are partially supported by Joint Research Grant of Institute of Natural Sciences at Nihon University for 2015. The first author thanks to Jiming Ma for useful discussions in this topic, and also thanks to Kazuma Shimomoto for letting him know about the Stirling number of the first kind. He is partially supported by JSPS KAKENHI Grant Number 26400100. The third author is partially supported by JSPS KAKENHI Grant Number 25400050.

References

[1] P. Erdös, On a conjecture of Hammersley, J. London Math. Soc. **28** (1953), 232–236.

[2] J. M. Hammersley, The sums of products of the natural numbers, Proc. London Math. Soc. (3) **1** (1951), 435–452.

[3] J. Ma, Components of random links, J. Knot Theory Ramifications **22** (2013), no. 8, 1350043, 11 pp.

A Appendix: Randomness of Amida-kuji

Abstract: In this appendix, applying our methods used in the above, we consider the "Amida-kuji" constructed by the random walk, and show that such Amida-kuji are actually "random". Furthermore we show that, when we consider the grouping given by such Amida-kuji, against our naive intuition, the most expected grouping is that including an element left out from the others.

A.1 Introduction

The *Amida-kuji* is a Japanese traditional method of lottery. In this appendix, we mathematically regard it as a kind of geometric object which generates a permutation of a number of letters.

Precisely, as a geometric object on the plane, an Amida-kuji consists of parallel, evenly placed, vertical segments, called "poles", and mutually disjoint, horizontal segments with endpoints on the adjacent poles, called "steps".

In this appendix, we consider the randomness of such an Amida-kuji. Precisely if we construct Amida-kuji "randomly", then is the lottery obtained by the Amida-kuji actually "random"?

There are several ways to construct Amida-kuji randomly, but we here use random walks on some sets. See [1] for the other method for example. Our construction of "random" Amida-kuji will be given in the next section. Then we will show that such an Amida-kuji can yield a sufficiently random lottery. On the other hand, we can consider a grouping of some objects via Amida-kuji. For this grouping, against our naive intuition, we will show that a random Amida-kuji does not given a "random" grouping in some sense. This topic will be treated in the last section.

A.2 Random Amida-kuji via random walk

Here we explain our method to construct Amida-kuji by using random walk. Rough sketch is given as follows:

Prepare N poles (vertical segments). There are $N-1$ positions (bays between poles) where one can put steps. The, from the top to bottom, one can insert steps with equal probabilities. Since adding steps more and more, the Amida-kuji become monotonically complicated, it seems not a good method to choose Amida-kuji "randomly". Thus we add the option "insert no step". That is, a step is either added at any of the $N-1$ positions with probability $1/N$, or not added with probability $1/N$.

In the next subsections, we will formulate this procedure mathematically.

Here we explain how to do lottery by using Amida-kuji (see [3] for example).

1. Draw the number of poles as same as the number of the actors.
2. Set the position at the top ends of the poles where the actors write their names. Write the results of the lottery at the bottom of the poles.

3. Concealed the results at the bottom, insert steps "randomly". To get more randomness, someone other than the actors can add steps.

4. The actors choose the positions at the top ends of the poles.

5. Follow the pole downward from the upper end. At the intersection points of the pole and steps, have to turn right or left following the steps. Finally reach the lower end of some pole to get the results.

Typically there are two kinds of lottery done via Amida-kuji.

(1) Getting a single success. i.e., a mark of success is signed at one of the bottom end of the N poles.

(2) Making an order of the actors. i.e., the numbers 1 to N are assigned at the bottom ends of the N poles.

For these uses of Amida-kuji, the following theorem guarantees the randomness of our Amida-kuji constructed by using random walks.

Theorem 1 (Randomness of Amida-kuji). *Consider an Amida-kuji of N poles constructed by using a random walk of k steps. Then (1) as getting a single success, for each actor, the probability to get the success converges $1/N$ when $k \to \infty$. (2) as making an order of the actors, for each order, the probability to be obtained the order converges $1/N!$ when $k \to \infty$.*

In the sequel, for both cases (1) and (2), we will set a probability space for Amida-kuji, and give proofs for (1) and (2) in Theorem 1.

A.2.1 Getting a single success via Amida-kuji

Here we consider the case (1) to get a single success.

First we set our probability space in this case.

When N poles are given, There are $N-1$ positions (bays between poles), say $1, 2, \ldots, N-1$, where one can put steps. We then set the sample space $\Omega = \{0, 1, \ldots, N-1\}^{\mathbb{N}}$, and consider the Bernoulli measure $\mu = (\frac{1}{N}, \ldots, \frac{1}{N})^{\mathbb{N}}$ on Ω.

That is, given path $\omega = \omega_1\omega_2 \cdots \in \Omega$, for each $n \geq 1$, a step is inserted between ω_n and $\omega_n + 1$ at level n, while no step is inserted at level n when $\omega_n = 0$

Furthermore, to include the initial condition, we set $\hat{\Omega} = \{1, \ldots, N\} \times \Omega$, and consider the initial distribution π on the top ends of the poles $\{1, \ldots, N\}$, set the probability measure $\mu_\pi = \pi \times \mu$ on $\hat{\Omega}$. In this way, we define $(\hat{\Omega}, \mu_\pi)$ as the probability space for Amida-kuji with initial distribution π

Next we define random variables X_n $(n \geq 1)$ on $(\hat{\Omega}, \mu_\pi)$ as $X_n((\omega_0, \omega)) = \omega_n$. Then we see that

$$p_{ij} = P((\omega_0, \omega) \in \hat{\Omega}\colon X_n(\omega) = j \mid X_{n-1}(\omega) = i) = \begin{cases} \frac{1}{N} & j = i+1, i \neq N \\ \frac{1}{N} & j = i-1, i \neq 1 \\ \frac{N-1}{N} & j = i = N \text{ or } j = i = 1 \\ \frac{N-2}{N} & j = i \text{ and } j \neq 1, N \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

is independent from n. By setting this p_{jk} as the transition probability, we can get a Markov chain $\{X_n\}$ on $\hat{\Omega}$ with the initial distribution π.

By regarding this Markov chain as a random walk, for each $X_n(\omega)$, an Amida-kuji is uniquely determined.

Proof of Theorem 1 (1). Let us consider the transition matrix $P = (p_{jk})$ for the random walk. Note that this P is an $N \times N$ symmetric matrix.

On the other hand, it is well-known that, for the matrix $P_k = (p^k_{i,j})$ with $p^k_{i,j} := P(X_k = x_j | X_0 = x_i)$, we have $P_k = P^k(k \geq 1)$ with setting $P := P_1$.

Moreover, this P is an irreducible matrix, for $p^k_{i,j} \neq 0$ holds for every (i, j) when $k \geq N$. Also P is aperiodic, i.e., its period is 1, for $p_{i,i} > 0$ $(\forall i)$. It concludes that P is a primitive matrix, and so, we can use the following Perron-Frobenius theorem.

The Perron-Frobenius theorem. *Let A be an irreducible, aperiodic, non-negative square matrix. Then there exists a positive real eigenvalue r of A, called the Perron-Frobenius eigenvalue. Both right and left eigenspaces associated with r are one-dimensional. All the entries of the eigenvector v for the eigenvalue r are positive. The only eigenvectors whose entries are all positive are those associated with the eigenvalue r.*

Now, since P is a stochastic matrix, ${}^t(1, 1, \cdots, 1)$ is an eigenvector of P. Also P is a symmetric matrix, $\pi_0 = (1/N, \cdots, 1/N)$ is a left eigenvector of P. Then, applying the theorem above, as $k \to \infty$, we see that $\pi P_k = \pi P^k \to \pi_0$ for any initial distribution π. That is, for sufficiently large k, any entry of $\pi P_k - \pi_0$ can become smaller than any given positive number $\varepsilon > 0$. In particular, if we consider

$$\pi^i_j = \begin{cases} 1 & j = i, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

as the initial distribution, $\pi^i_j P^k$ gives a random walk reaching everywhere with equal probabilities as $k \to \infty$. Consequently, as getting a single success, for each actor, the probability to get the success converges $1/N$ when $k \to \infty$. $\square$

Remark: Since the transition probability matrix is aperiodic and irreducible, this random walk is mixing as dynamical system. Further since the matrix is symmetric, P_k converges to the stochastic matrix whose all the entries are equal. This implies that, from any initial distribution, it converges to the distribution of equal probabilities.

A.2.2 Making an order of the actors via Amida-kuji

In this case, we consider the symmetric group $\mathfrak{S}_N$ of the N letters $\{1, 2, \cdots, N\}$. Then we take the sample space $\Omega = \{\mathfrak{S}_N\}^{\mathbb{N}}$, and consider the Bernoulli measure $\mu = (\frac{1}{N!}, \dots, \frac{1}{N!})^{\mathbb{N}}$. Let us set (Ω, μ) as the probability space of Amida-kuji in this case.

We consider random variable $X_n(\omega)$ $(n \geq 0)$ on (Ω, μ) defined by

$$X_n(\omega) = \omega_n$$

where we set $X_0(\omega) = e \in \mathfrak{S}_N$ with the identity element e. Recall that the transposition $\sigma_i = (i, i+1)$ is defined by $\sigma_i(i) = i+1$, $\sigma_i(i+1) = i$, $\sigma_i(j) = j$ $(j \neq i, i+1)$. Then

$$p_{\sigma',\sigma} = P(\omega \in \Omega\colon X_n(\omega) = \sigma' \mid X_{n-1}(\omega) = \sigma) = \begin{cases} \frac{1}{N} & \sigma'\sigma^{-1} = \sigma_j \ (1 \leq j \leq N-1) \\ \frac{1}{N} & \sigma' = \sigma \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

is independent from n. By setting this p_{jk} as the transition probability, we can get a Markov chain $\{X_n\}$ on Ω. By regarding this Markov chain as a random walk on $\mathfrak{S}_N$, for each $X_n(\omega) \in \mathfrak{S}_N$, an Amida-kuji is uniquely determined.

Now the proof of Theorem 1 (2) can be obtained in the same way as (1).

A.3 Grouping via Amida-kuji

Next we consider the grouping labeled objects of a set via Amida-kuji. Precisely consider the following setting.

Let A be an Amida-kuji with N poles, and σ_A the permutation of N letters induced from A as in the previous subsection. Then we define an equivalence relation so that a pair of elements X and Y are equivalent (belonging a same group) if $\sigma_A(X) = Y$. Then the set S can be divided into mutually disjoint subsets.

Now it is natural to ask what grouping can occur for random Amida-kuji. By naive intuition, it seems one can have "random" grouping via random Amida-kuji. However we actually have the following.

Theorem 2. *The most expected grouping of N objects obtained from a random Amida-kuji is the grouping by just two subsets, one of which consists of $N-1$ objects and the other only has single elements.*

Here, for example, we regard the groupings of 7 objects into $(3, 2, 2)$, $(2, 3, 2)$, and $(2, 2, 3)$ are equivalent. That is, we only consider the partition of the cardinality of the set.

We remark that it is known that the expected value of the number of the grouping via random Amida-kuji is already calculated, that is

$$1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{N}.$$

This is essentially obtained in [2] in different context.

The key to prove the theorem is the following algebraic lemma. We omit the proof here.

Lemma 1. *In the symmetric group of the order at least* 3*, the conjugacy class of the maximal cardinality is the one containing the* $(N-1)$*-cycle* $(1\ 2\ \dots\ N-1)$*, and the cardinality is* $N \cdot (N-2)!$.

Proof of Theorem 2. Amida-kuji coming from the random walk as in the previous subsection correspond to elements (permutations) of the symmetric group with equal probabilities $1/N!$.

In this case, such an Amida-kuji gives a grouping which corresponds to the cycle decomposition of the permutation given by the Amida-kuji.

Moreover, since the number of cycles in the cycle decomposition for a permutation is conjugacy invariant, the number of permutations admitting a cycle decomposition by cycles of the fixed orders is equal to the cardinality of the conjugacy class of the permutation.

Therefore the probability of random Amida-kuji to correspond to a permutation inducing a given grouping converges to the ratio (the number of the elements in $\mathfrak{S}_N$ described by a product of given cycles) / $N!$, which is equal to

$$\frac{\text{the cardinality of the conjugacy classes in } \mathfrak{S}_N \text{ represented by a product of given cycles}}{N!}.$$

It then follows from the lemma above that the conjugacy class of the maximal cardinality in the symmetric group of the order at least 3 is the one containing the $(N-1)$-cycle $(1\ 2\ \dots\ N-1)$. The grouping corresponding to this permutation is the one consisting to $\{1, 2, \cdots, N-1\}$ and $\{N\}$.

Also the probability of such a grouping is equal to $\frac{N(N-2)!}{N!} = \frac{1}{N-1}$. This completes the proof. □

References

[1] Yasuhiro Inoue, Statistical analysis on Amida-kuji, Physica A, 369 (2006) 867–876.

[2] J. Ma, Components of random links, J. Knot Theory Ramifications **22** (2013), no. 8, 1350043, 11 pp.

[3] Wikipedia contributors, "Ghost Leg", Wikipedia, The Free Encyclopedia, `https://en.wikipedia.org/wiki/Ghost_Leg`, (Accessed June 16, 2015)

[The followoing is a Japanese translation of Appendix A.]

B　付録：あみだくじのランダム性について

概要：この付録では，本文で用いた手法を応用して，酔歩（ランダムウォーク）を用いて構成する「あみだくじ」を考え，それが十分にランダムであることを示す。さらに，あみだくじを用いた自然なグループ分けを考えるとき，最も起こりうるグループ分けが，(直感に反して）仲間はずれを生むグループ分けであることを示す。

B.1　はじめに

いわゆる「あみだくじ（阿弥陀籤)」をどのように数学的に扱うか，については，いろいろと考えられますが，ここでは，基本的に N 文字の置換を生成する一種の幾何的なオブジェクトとみることにします。つまり，xy 座標平面上で，x 軸に沿った平行移動で重ね合わせる事ができるような，いくつかの等間隔に並んだ線分（これを縦棒ということにする）と，それぞれの隣り合う線分上に端点を持つ互いに交わらないいくつかの x 軸に平行な線分（これを横棒ということにする）からなる図形を，**あみだくじ** と呼ぶ事にします。

このようなあみだくじが与えられたとき，よく知られているように，次のようにして縦棒たちの上端点と下端点の間に対応関係を作る事ができます：

> まず上端点のひとつを選ぶ。それからその点を端点とする縦棒を下へ辿っていく。このとき，横棒と縦棒の交点では必ず曲がることとし，縦棒に沿っては必ず下方に向かうこととする。最終的に，いずれかの縦棒の下端点にたどり着く。この点が最初に選んだ点に対応する点とする。

このようにして，あみだくじが与えられたとき，代数的な「文字の置換」を得る事ができます。置換の集合から，その合成として演算を考える事で，いわゆる対称群が得られ，そこから様々な美しい数学をみることができます（例えば，[5]，[2] 参照)。

さて本稿で取り扱うのは，このようなあみだくじのランダム性についてです。実際，あみだくじを「ランダムに」生成した場合，それはくじとして本当にランダムなのでしょうか？

まず考えなくてはいけないのは「ランダムに生成する」という事の意味です。もちろんいろいろな定式化ができるでしょうが，ここでは，酔歩（ランダムウォーク）を利用することにします。簡単にいえば，まず N 本の縦棒を用意し，等確率で上から順に横棒を

付け加えていくわけです。ただし，どんどん複雑になってしまっては「ランダムなあみだくじ」とは言えなさそうなので，確率 $1/N$ で付け加えない，という選択肢もいれておきます。つまり，確率 $1/N$ で $N-1$ 箇所のいずれかのところに横棒を加える，(横棒をひく場所（縦棒と縦棒の間）は $N-1$ 箇所あります）もしくは，確率 $1/N$ でなにもしない，という操作を順に行っていくとしていくわけです。

このとき，十分長い時間の後に得られたあみだくじを「ランダムに選んだあみだくじ」ということにしましょう（もちろんランダムにあみだくじを構成する方法については，他にもいろいろな方法があり得ます。例えば，[1] など)。詳しくは次節をみてください。

このようにしてランダムウォークを利用してあみだくじを生成するとき，実は，それはくじとして十分にランダムであることが証明できます。次節で，ランダムウォークを利用したあみだくじの生成法の説明と，そのランダム性の証明を与えます。

一方で，ランダムなあみだくじを使ったグループ分けを考えることができるのですが，この場合には，ランダム性とは直感的に異なる状況が得られることを，最後に示します。

B.2　ランダムなあみだくじ ～ランダムウォークを使って～

ここでは，いわゆるランダムウォーク（酔歩）を利用して，あみだくじを「ランダムに」生成する事を考えます。以下では，より正確にこのことを数学的に定式化し，そのようにランダムウォークから得られたあみだくじが，確かにランダム性を持つことを示します。

さて一般に行われているような，あみだくじを利用した，くじをひく方法は，以下の通りになります（例えば [6] 参照)。

1. 紙にくじに参加する人数分だけ縦線を平行に引く。
2. 一方の線端（上側）には氏名などを記入するための欄を空けておき，もう一方（下側）にはくじの結果をあらかじめ書いておく。
3. 梯子状に横線を書く。この際，くじの下線端は紙を折るなどして見えないようにする。
4. 参加者が上線端を選ぶ順序を（くじなどで）決定する。
5. 順序に従い，重複しないように任意の線端を選んでゆく。
6. 全員が上線端を選びしるしなどを付け終わった後，くじの下線端を公開する。
7. 各々，自分の線を下へ辿ってゆき，たどり着いた場所に書いてあることが選んだくじの結果となる。

このような方法を用いて行われるくじとして，例えば，複数人のくじの参加者に対し，

(1) ひとつのあたりを引く（つまり，くじの結果として，N 本のうち 1 本のみの縦線の下端に当たりのしるしをかく）

(2) 参加者の順番をきめる（つまり，くじの結果として，縦線の下端に 1 番〜N 番までの番号をかく）

という，あみだくじの使われ方があります。

これらの使い方に対しては，ランダムウォークを用いて生成された「ランダムなあみだくじ」は確かにランダムであることが，次の定理によって保障されます。

定理 1 (ランダムなあみだくじ). ランダムウォークを用いて生成された「ランダムなあみだくじ」に対して，ランダムウォークのステップ数を k とする。このランダムなあみだくじを用いて
(1) ひとつのあたりを引く場合，各参加者があたりをひく確率は，k が十分大きければ，ほぼ等確率である。
(2) 参加者の順番をきめる場合，それぞれの順番付けが得られる確率は，k が十分大きければ，ほぼ等確率である。

以降では，(1) と (2) のそれぞれの場合において，自然な確率空間を設定し，そこから得られるランダムウォークに対応するあみだくじが，定理の主張を満たすことを示していきます。

B.2.1 ランダムなあみだくじによるくじびき

ここでは「 (1) ひとつのあたりを引く」場合について考えます。

まず，N 本の縦棒が与えられたとき，縦棒の間の横線を引く「場所」を $1, 2, \ldots, N-1$ とします。そこで，標本空間 $\Omega = \{0, 1, \ldots, N-1\}^{\mathbb{N}}$ を考え，その上に Bernoulli 測度 $\mu = (\frac{1}{N}, \ldots, \frac{1}{N})^{\mathbb{N}}$ を考えます。これは，$\omega = \omega_1\omega_2 \cdots \in \Omega$ とするとき，各 n $(n \geq 1)$ について，n 段に ω_n と $\omega_n + 1$ を結ぶ横線を入れることを意味しています。ただし，$\omega_n = 0$ ならば n 段には横線を入れないことを意味しています。

さらに，初期値を入れるために $\hat{\Omega} = \{1, \ldots, N\} \times \Omega$ とし，スタート点の棒の位置 $\{1, \ldots, N\}$ の上の初期確率分布 π を考え，$\hat{\Omega}$ の上に確率測度 $\mu_\pi = \pi \times \mu$ と定めます。この $(\hat{\Omega}, \mu_\pi)$ が初期値 π のあみだくじの確率空間となります。

次に $(\hat{\Omega}, \mu_\pi)$ の上の確率変数 X_n $(n \geq 1)$ を，

$$X_n((\omega_0, \omega)) = \omega_n$$

と定めます。すなわち，$n-1$ 段目で j にいて，n 段目に j と $j+1$ を結ぶ横線が入っていれば $j+1$ に移動，$j-1$ と j を結ぶ横線が入っていれば $j-1$ に移動するという意味です。このとき

$$p_{ij} = P((\omega_0, \omega) \in \hat{\Omega} \colon X_n(\omega) = j \mid X_{n-1}(\omega) = i) = \begin{cases} \frac{1}{N} & j = i+1, i \neq N \\ \frac{1}{N} & j = i-1, i \neq 1 \\ \frac{N-1}{N} & j = i = N \text{ or } j = i = 1 \\ \frac{N-2}{N} & j = i \text{ and } j \neq 1, N \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

は n に依存しないので，この p_{jk} を推移確率とし，初期状態 π を考えると $\hat{\Omega}$ の上のマルコフ連鎖 $\{X_n\}$ 得られます。

このマルコフ連鎖をランダムウォークとみなすと，$X_n(\omega)$ に対して，あみだくじが一つ決まることになることから，そのあみだくじを，**ランダムウォークから得られるあみだくじ**ということにします。

さて，これで定義の証明の準備ができました。

定理 1 (1) の証明. まずランダムウォークの遷移行列 $P = (p_{jk})$ を考えます。この P は $N \times N$ 型の対称行列になっています。

一方，いま考えているマルコフ過程の高次の遷移確率行列は，$p^k_{i,j} := P(X_k = x_j | X_0 = x_i)$ を成分とする行列 $P_k = (p^k_{i,j})$ として与えられます。このとき，$P := P_1$ とすれば，$P_k = P^k$（$k \geq 1$）が成り立ちます。

さらに，$k \geq N$ のとき，$p^k_{i,j} \neq 0$ が任意の (i,j) について成り立つ事から，P は既約行列であることがわかります。また $p_{i,i} > 0$（$\forall i$）より，P の周期が 1，つまり，P は非周期的であることもわかります。従って，P はいわゆる原始的となり，以下のペロン–フロベニウスの定理を適用する事ができます。

定理 2 (ペロン–フロベニウスの定理). 行列 A を非負既約かつ非周期的な正方行列とする。このとき，A はペロン=フロベニウス固有値と呼ばれる固有値 $r > 0$ を持ち，r に対応する右および左の各固有空間は一次元になる。さらに，固有値 r に対応する左固有ベクトル v の成分はすべて正であり，すべての成分が正であるような固有ベクトルは，固有値 r に対応するもののみである。

確率行列の性質から，${}^t(1,1,\cdots,1)$ は P の固有ベクトルになります。すなわち，$r=1$ が最大固有値であり，対称行列であることから $\pi_0=(1/N,\cdots,1/N)$ は左固有ベクトルになります。$k\to\infty$ のとき，任意の初期分布 π について指数的に $\pi P_k=\pi P^k\to\pi_0$ であり，十分大きな k については，$\pi P_k-\pi_0$ の各成分について，その絶対値が任意に与えられた正数 $\varepsilon>0$ よりも小さくなるようにできます。従って，とくに初期分布として

$$\pi_j^i=\begin{cases}1 & j=i,\\ 0 & \text{otherwise.}\end{cases}$$

を考えても，$\pi_j^i P^k$ は，$k\to\infty$ のとき，$1/N$ に収束し，つまり，どこへも等確率で到達するランダムウォークとなります。従って，各参加者があたりをひく確率は等確率に収束します。 □

注意：実際，非周期的かつ既約な遷移行列から作られる力学系が混合的であることが，不変確率に指数的に収束することの証明になっています。

B.3 ランダムなあみだくじによる順番決め

この場合，N 文字の集合 $\{1,2,\cdots,N\}$ 上の N 次対称群 $\mathfrak{S}_N$ を考え，標本空間を $\Omega=\{\mathfrak{S}_N\}^{\mathbb{N}}$ とします。その上に Bernoulli 測度 $\mu=(\frac{1}{N!},\ldots,\frac{1}{N!})^{\mathbb{N}}$ を考えます。この (Ω,μ) をあみだくじの確率空間と考えることにします。

(Ω,μ) の上の確率変数 $X_n(\omega)$ $(n\geq 0)$ を，

$$X_n(\omega)=\omega_n$$

で定めます。ただし，$X_0(\omega)=e\in\mathfrak{S}_N$（恒等元）とします。このとき，互換 $\sigma_i=(i,i+1)$ を $\sigma_i(i)=i+1$，$\sigma_i(i+1)=i$，$\sigma_i(j)=j$（$j\neq i,i+1$）とし，

$$p_{\sigma',\sigma}=P(\omega\in\Omega\colon X_n(\omega)=\sigma'\mid X_{n-1}(\omega)=\sigma)=\begin{cases}\frac{1}{N} & \sigma'\sigma^{-1}=\sigma_j\ (1\leq j\leq N-1)\\ \frac{1}{N} & \sigma'=\sigma\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$$

とすると，$p_{\sigma',\sigma}$ は n に依存しないので，Ω 上のマルコフ連鎖 $\{X_n(\omega)\}$ が得られ，これを対称群上のランダムウォークとみなします。このとき，$X_n(\omega)\in\mathfrak{S}_N$ に対して，あみだくじが一つ決まることになります。このあみだくじを，**対称群上のランダムウォークから得られるあみだくじ**ということにします。

定理 1 (2) の証明. まず行列 $P=(p_{\sigma',\sigma})$ を考えます。この P は $N!\times N!$ 型の対称行列になっています。

一方，いま考えているマルコフ過程の高次の推移確率行列は，$p^k_{\sigma,e} := P(\omega \in \Omega \colon X_k(\omega) = \sigma \mid X_0(\omega) = e)$ を成分とする行列 $P_k = (p^k_{\sigma,e})$ として与えられます。このとき，$P := P_1$ とすれば，$P_k = P^k$ $(k \geq 1)$ が成り立ちます。

さらに，$k \geq N!$ のとき，$p^k_{\sigma,e} \neq 0$ が任意の σ について成り立つ事から，P は既約行列であることがわかります。また $p_{\sigma,\sigma} > 0$ $(\forall \sigma \in \mathfrak{S}_N)$ より，P の周期が 1，つまり，P は非周期的であることもわかります。従って，P はいわゆる原始的となり，再びペロン–フロベニウスの定理を適用する事ができます。

確率行列の性質から，${}^t(1, 1, \cdots, 1)$ は P の固有ベクトルになります。すなわち，$r = 1$ が最大固有値であり，対称行列であることから $\pi_0 = (1/N!, \cdots, 1/N!)$ は左固有ベクトルになります。$k \to \infty$ のとき，初期状態 $\pi = (1, 0, \cdots, 0)$ について指数的に $\pi P_k = \pi P^k \to \pi_0$ であり，十分大きな k については，$\pi P_k - \pi_0$ の各成分について，その絶対値が任意に与えられた正数 $\varepsilon > 0$ よりも小さくなるようにできます。従って，$k \to \infty$ のとき，参加者の順番をきめる場合も，それぞれの順番付けが得られる確率は等確率に収束します。 □

B.4　あみだくじによるグループ分け

さて次に，あみだくじを使った N 個のラベル付きの集合 S の **グループ分け** を考えてみます。具体的には，次のような設定を考えます。

N 本の縦棒を持つあみだくじを A とし，A から誘導される N 文字の置換を σ_A とします。このとき，$\sigma_A(X) = Y$ ならば，ラベル X がついた S の元とラベル Y がついた S の元は同じグループに属するとして，S を互いに共通部分のない部分集合の和として表す，つまりグループ分けする，ことができます。

さて素朴な疑問として，あみだくじ A から得られるグループ分けはどのようなものでしょうか？　特に，A をランダムに（無作為に）選んだとき，どのようなグループ分けが得られるでしょうか？

このようにして，ランダムに選んだあみだくじについて，それから得られるグループ分けを考えてみます。一般に N 個のもののグループ分けをするとき，直感的には十分，複雑にわけられそうな気がしますが，実は，以下の事が証明できます。

定理 3. ランダムに選んだあみだくじによる N 個のもののグループ分けで，もっとも確率の高いものは，$N-1$ 個からなるグールプと *1* 個のものからなるグループの 2 つにわけるものである。

なおその確率は $1/(N-1)$ となることもわかります。また実は，N 個すべてを一つの

グループとする場合が，次に確率が高く，その確率は $1/N$ となっています。ただし，グループ分けにおいて，例えば，7個のものをわけるとき，$(3,2,2)$ と $(2,3,2)$ と $(2,2,3)$ は同じグループ分けとみなす事にします。

さらに得られるグループ分けの「グループの数」の期待値は，

$$1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{N}$$

になることも知られています（あみだくじを扱っている訳ではないのですが，本質的には[4] で証明されています）。

定理の証明の鍵となるのは，次の代数的な補題です。

補題 1. 対称群 $\mathfrak{S}_N (N \geq 3)$ の共役類のうち，元の個数が最大になるのは，$\sigma = (12\ldots n-1)$ を含む共役類の場合に限り，その元の個数は $N\cdot(N-2)!$ で与えられます。

補題の証明. 対称群 $\mathfrak{S}_N (N \geq 3)$ の元 a に対して，$C(a)=\{g\in \mathfrak{S}_N | ga=ag\}$ によりその中心化群を表すとき，a を含む共役類 K の元の個数は $|\mathfrak{S}_N|/|C(a)|$ で与えられます（[3]）。従って，任意の $a \in \mathfrak{S}_n$ に対して，$|C(a)| \geq N-1$ を言えばよい。

一般に，$k_1,\ldots,k_r \geq 2$ ならば $k_1\cdots k_r \geq k_1+\cdots+k_r$（ただし，等号は $r=1$，または，$r=2, k_1=k_2=2$ のときに限ります）に注意します。証明は r についての帰納法を用います。

さて，$a\in\mathfrak{S}_N$ を共通文字を含まない巡環の積で書きましょう：$a=a_1\cdots a_r$（ここで，a_i は k_i 巡環で，$k_1\geq k_2 \geq \cdots \geq k_r \geq 1$)。

$k_r \geq 2$ とするとき，$C(a)$ は $a_1,\ldots,a_r$ で生成される位数 $k_1\cdots k_r$ のアーベル群の直積を含みます。上の注意により，$|C(a)|$ は $k_1+\cdots+k_r=N$ 以上です。

$k_{r-1} \geq 2, k_r=1$ としましょう。上と同様に，$C(a)$ は $a_1,\ldots,a_{r-1}$ で生成されるアーベル群，すなわち，位数が $k_1\cdots k_{r-1}$ の群を含みますが，上の注意により，その位数は $k_1+\cdots+k_{r-1}=N-1$ 以上です。(この場合は等号になりうる場合です。)

最後に，$k_p=\cdots=k_r=1$ $(2\leq p\leq r-1)$ の場合を考えましょう。このとき，$C(a)$ は $a_1,\ldots,a_{p-1}$ に加えて，残りの文字からなる長さ $r-p+1$ (≥ 2) の巡環で生成される直積アーベル群を含みます。その位数は，$k_1\cdots k_{p-1}\cdot(r-p+1)\geq k_1+\cdots+k_{p-1}+(r-p+1)=N$ 以上になります。

以上から，少なくとも $|C(a)|\geq N-1$ がわかります。

また，$|C(a)|=N-1$ が成立したとすると，$r-1=1, k_1\geq 2, k_2=1$ または $r-1=2, k_1=k_2=2, k_3=1, n-1=4$ のいずれかが成立します。前者ならば，a は $(n-1)$-巡環

となります。後者ならば, $n=5$ が成り立ちます。このとき, $a=(12)(34)$ と思ってよいでしょう。しかし，この場合は $|C(a)|=8$ なので，等号は成立しません (四元数群も $C(a)$ に含まれます)。 $\square$

定理 3 の証明. 前節 (2) で定義したランダムウォークから得られるあみだくじを考えると，対応する対称群の元，つまり置換は，ほぼ同確率 $1/N!$ で得られています。その場合，そのあみだくじを使って得られるグループ分けは，対応する置換を巡環の積で表したときの表し方に対応します。さらに，置換を巡環の積で表したときの巡環の個数は共役不変であり，同じ位数の巡環の積で表される置換の個数は，その共役類の位数に一致する事がわかります。

従って，ランダムなあみだくじが，あるひとつのグループ分けを与える置換に対応する確率は，

$$\frac{\text{ある巡環の積で表される}\,\mathfrak{S}_N\,\text{の元の個数}}{N!}=\frac{\text{ある巡環の積で表される}\,\mathfrak{S}_N\,\text{の元の共役類の位数}}{N!}$$

に一致する事がわかります。

すると，上の補題より，対称群 $\mathfrak{S}_N(N\geq 3)$ の共役類のうち，元の個数が最大になるのは，$\sigma=(12\ldots N-1)$ を含む共役類の場合に限り，その置換に対応するグループ分けは，$\{1,2,\cdots,N-1\}$ と $\{N\}$ となるものになるわけです。またそのようなグループ分けになる確率は $\frac{N\cdot(N-2)!}{N!}=\frac{1}{N-1}$ となります。 $\square$

References

[1] Yasuhiro Inoue, Statistical analysis on Amida-kuji, Physica A, 369 (2006) 867–876.

[2] 小林 雅人, あみだくじの数学 (数学のかんどころ 5), 共立出版, 2011.

[3] 永尾 汎, 代数学, 朝倉書店, 1986.

[4] J. Ma, Components of random links, J. Knot Theory Ramifications **22** (2013), no. 8, 1350043, 11 pp.

[5] 日本大学文理学部数学教室　編, 鈴木　正彦　監修, 一緒に楽しむための数学 π，アミダくじから年金，金融まで, 日本評論社, 2008.

[6] フリー百科事典『ウィキペディア (Wikipedia)』, あみだくじ, `http://ja.wikipedia.org/wiki/`あみだくじ. 閲覧日：2015/5/12

Department of Mathematics
College of Humanities and Sciences
Nihon University
3-25-40 Sakurajosui, Setagaya-ku, Tokyo 156-8550
JAPAN
E-mail address: `ichihara@math.chs.nihon-u.ac.jp`
E-mail address: `mori@math.chs.nihon-u.ac.jp`
E-mail address: `yoshida@math.chs.nihon-u.ac.jp`

日本大学文理学部数学科　市原一裕
森　真
吉田健一